## 基础课35 数列的综合问题

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 已知等差数列的公差为2，若,,成等比数列，则（ C ）.

A. B. C. 4 D.

[解析] 数列 是公差为2的等差数列，

，，

,,成等比数列，

，即，解得.故选.

2. [2024·河南联考]已知数列满足且数列是单调递增数列，则的取值范围是（ A ）.

A. , B. , C. D.

[解析]由题意，可得,,

,解得.故选.

3. 《算法统宗》是中国古代数学名著，在这部著作中，许多数学问题都是以歌诀形式呈现的，《九儿问甲歌》就是其中一首：一个公公九个儿，若问生年总不知，自长排来差三岁，共年二百又零七，借问长儿多少岁，各儿岁数要详推.在这个问题中，这位公公最年幼的儿子的岁数为（ A ）.

A. 11 B. 13 C. 14 D. 16

[解析]将该公公九个儿子的年龄按从大到小的顺序排列，记这位公公的第 个儿子的年龄为，则数列 为等差数列，公差，

，解得，

所以.故选.

4. （改编）定义数列为数列的“差数列”.若,的“差数列”的第项为，则数列的前2024项和（ D ）.

A. B. C. D.

[解析]依题意得，，当 时，，且 满足上式，因此，

所以.故选.

5. 若是首项为正数、公比为的等比数列，且前项和为，则“”是“对任意的，都有”的（ C ）.

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]依题意知，，若，则，，

此时不满足对任意的，都有，所以，则.

若对任意的，都有，则，所以，

则，即，

所以，则，即，所以，

依题意，对任意的，，

因为函数 在 上单调递减，值域是,，

所以，解得，所以，

故“”是“对任意的，都有”的充要条件.故选.

6. 已知数列满足，且，若，则的最小值为（ B ）.

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

[解析]因为，等式两边同时乘以 可得，

所以,且，

所以数列 是首项和公差都为1的等差数列，则，所以，

所以.

当 时，；

当 时，，即数列 从第二项开始递减.

因为，，

所以若，则 的最小值为4.故选.

7. （改编）设是公比为的等比数列，首项，对于，，当且仅当时，数列的前项和取得最大值，则的取值范围为（ C ）.

A. B. C. D.

[解析] 等比数列 的公比为，首项,

,

数列 是以 为公差，为首项的等差数列，

.

当且仅当 时，最大，

，且

,即.故选.

8. 已知等差数列与等比数列的首项均为1，且公差，公比且，则集合的元素最多有（ B ）.

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

[解析]由题意知，，，

由 得，显然 为1个解.

当,时，点 在一条上升的直线上，

点 在一条上升的指数曲线上，这两条线最多有2个交点；

当,时，点 在一条下降的直线上，

点 在一条下降的指数曲线上，这两条线最多有2个交点；

当,或,时，直线与曲线只有1个交点.

因此集合 的元素最多有2个.故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）已知在数列中，，且点在函数的图象上，则下列结论正确的是（ ACD ）.

A. 数列单调递增 B.

C. D.

[解析]由题意可知，所以，所以，

当 时，与 矛盾，所以，则，

所以数列 单调递增，正确；

又，所以，错误；

由上可知，

，

所以，正确；

由上可知，则（当且仅当 时取等号），

当 时，，所以，正确.故选.

10. （多选题）设数列的前项和为，若，则称数列是数列的“均值数列”.已知数列是数列的“均值数列”，且，则下列结论正确的是（ ACD ）.

A.

B. 是递减数列

C. 若数列的前项和为，则

D. 若存在，使得成立，则的取值范围是,

[解析]当 时，，解得，

因为, ①

所以当 时，, ②

由 得，即，

取，，此式不满足，

故数列 的通项公式为

由题意可得，则

因为，

所以，故 正确.

因为，所以 不是递减数列，故 错误.

因为

当 时，，

所以当 时，，

所以，

所以，即，

取，，此式满足，

所以数列 的前 项和，故 正确.

当 时，，

所以，

所以，即，

所以数列 从第3项开始是单调递减数列.

当 时，，

所以，

则由数列 的单调性可知.

因为存在，使得 成立，

所以，即，解得，故 正确.故选.

11. 设为公比的等比数列的前项和，且,,成等差数列，则10.

[解析]由题意知，，即，即，解得（舍去）或，.

12. 已知数列的各项都是正数，.若数列单调递增，则首项的取值范围是  .

[解析]由题意知，正数数列 是递增数列，且，

，解得，，

,，

，.

#### 应用情境练

13. [2024·西安预测]已知在数列中，.定义：将使数列的前项的积为整数的数叫作期盼数.内的所有期盼数的和等于2026.

[解析]因为，

所以，

设，则，

所以 为2的整数次幂，

因为，

所以，

故满足条件的,8,16,32,64,128,256,512,1024，

故 内的所有期盼数的和为.

14. 某地生态采摘园的沃柑产量为6500公斤，计划不超过24天完成销售.采摘园种植的农产品一般有批发销售和游客采摘零售两大销售渠道.根据往年数据统计，从开园第1天到闭园，游客采摘量（单位:公斤）和开园的第天满足以下关系：批发销售每天的销售量为200公斤，每公斤5元，采摘零售的价格是批发销售价格的4倍.

（1）当取何值时，采摘零售当天的收入不低于批发销售当天的收入？

（2）采摘零售的总采摘量是多少？农户能否在24天内完成销售计划？

[解析]（1）由已知得，当 时，，解得.

当 时，，解得，

所以当 时，采摘零售当天的收入不低于批发销售当天的收入.

（2）不能.当 时，为等差数列，记这些项的和为，,,.

当 时，记数列 这些项的和为，

,

，即采摘零售的总采摘量是1327公斤.

批发销售的销售总量为（公斤），24天一共销售（公斤），故不能完成销售计划.

#### 创新拓展练

15. 在1和100之间插入个实数，使得这个数构成递增的等比数列，若将这个数的乘积记作，再令,，则数列的通项公式为  .

[解析]记由 个数构成的递增等比数列为，

则,，则，即,

所以，

即,.

16. [2024·青岛模拟]记关于的不等式的整数解的个数为，数列的前项和为，满足.

（1）求数列的通项公式；

（2）设，若对任意，都有成立，试求实数 的取值范围.

[解析]（1）由不等式，可得，

，，

当 时，，

当 时，，

适合上式，.

（2）由（1）可得，

.

,，

.

当 为奇数时，，

随着 的增大而增大，

当 时，取得最小值，最小值为，

；

当 为偶数时，，

随着 的增大而减小，当 时，取得最大值，最大值为，.

综上可知，.